

Existenz-, Nichtexistenz- und Aufbau- Aussagen für 3H-Graphen

Kaluza, Theodor

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 32, 1981,
S.25-37



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Existenz-, Nichtexistenz- und Aufbau-Aussagen für 3H-Graphen

Von **Theodor Kaluza**, Hannover

(eingegangen am 18.5.1981)

Bezeichnung: Ein 3H-Graph ist ein schlingenfreier Graph mit **3 Hamilton-Kreisen**, – unten 3H-Kreise genannt –, die so verlaufen, daß jede Kante zu genau zweien von ihnen gehört.

3H-Graphen sind daher endlich, zusammenhängend, brückenlos und endkantenfrei.

- (F 1) Feststellung 1: 3H-Graphen sind 3-regulär; –
laufen nämlich allgemeiner h Kreise so durch eine Ecke v eines Graphen, daß jede mit v inzidente Kante zu genau w von diesen Kreisen gehört, so hat v den Grad $g(v) = \frac{2h}{w}$; denn von jedem dieser h Kreise sind genau zwei Kanten mit v inzident, und in dem Produkt $2h$ ist jede mit v inzidente Kante w -fach gezählt. Bei 3H-Graphen nun ist für jede Ecke $h = 3$ und für jede Kante $w = 2$. \square
- (F 2) Feststellung 2: (a) v sei eine Ecke in einem 3H-Graphen, und $v - a$, $v - b$, $v - c$ seien die mit ihr inzidenten Kanten; dann gehört für je drei 3H-Kreise $a - v - b$ zu einem von ihnen, $a - v - c$ zu einem anderen und $b - v - c$ zum dritten;
- (b) durchläuft man einen von drei 3H-Kreisen, so durchläuft man abwechselnd Kanten der beiden anderen; –
- (c) durch jeden einzelnen von drei 3H-Kreisen sind die beiden anderen mitbestimmt; –
- sind nämlich H_1, H_2, H_3 drei 3H-Kreise, und läuft H_1 etwa mit $a - v - b$ durch v , so gehört $v - c$ nicht zu H_1 , also zu H_2 und zu H_3 , während jede einzelne der Kanten $a - v$ und $v - b$ (außer zu H_1) entweder zu H_2 oder zu H_3 gehört; da sich H_2 und H_3 nach der gemeinsamen Kante $c - v$ als Kreise über v hinaus fortsetzen, muß andererseits von diesen beiden Kanten $v - a$ und $v - b$ genau eine zu H_2 und genau eine zu H_3 gehören, – woraus sich (a) und (b) ablesen lassen; (b) und die Definition ergeben ohne weiteres (c). \square

Bezeichnung: Wenn die Kanten eines 3-regulären Graphen so mit 3 Farben gefärbt sind, daß für je 2 dieser Farben die Kanten mit diesen beiden Farben einen Hamilton-Kreis bilden, nennen wir das eine 3H-Färbung (der Kanten oder des Graphen).

- (F 3) **Feststellung 3:** Eine 3H-Färbung ist eine Kanten-Färbung im üblichen Sinne: eine Zerlegung der Kantenmenge in drei kantenfremde 1-Faktoren; –

denn wäre bei einer Ecke eine von den 3 Farben nicht vertreten, so würden die Kanten mit den beiden anderen Farben einen Teilgraphen mit mindestens einer Ecke dritten Grades, also keinen Kreis bilden. \square

Liegt in einem Graphen G eine 3H-Färbung vor, so gehört jede Kante zu genau zweien von den drei zweifarbigen Hamilton-Kreisen: G ist dann also ein 3H-Graph; ist umgekehrt G durch die 3H-Kreise H_1, H_2, H_3 ein 3H-Graph, so gehört jede Kante zu genau einem von ihnen nicht; gibt man ihr seinen Index als „Farbe“, so zeigt (F 2) (b), daß dadurch eine 3H-Färbung von G entstanden ist, bei der die ursprünglichen 3H-Kreise die zweifarbigen Hamilton-Kreise sind; bezeichnet man noch die Menge der einen 1-Faktor bildenden Kanten, die nicht zu H_i gehören, mit F_i , so hat man den

Satz 1: (a) Ein 3-regulärer Graph ist genau dann ein 3H-Graph, wenn er eine 3H-Färbung (seiner Kanten) besitzt;

(b) in 3H-Graphen ist für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$

$$F_i \cup F_j = H_k \quad \text{und} \quad H_i \cap H_j = F_k.$$

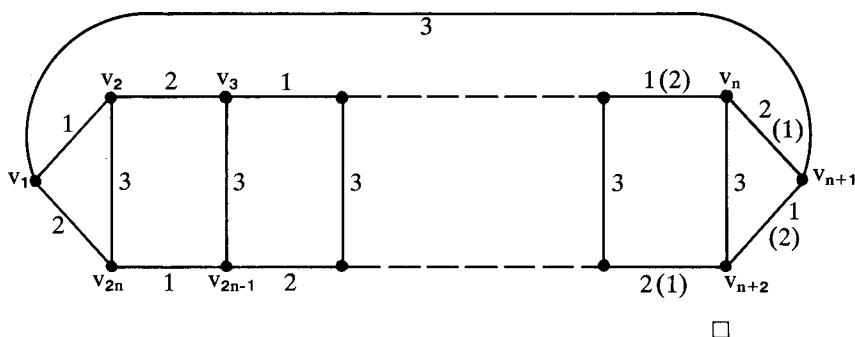
Ob ein in einem 3-regulären Graphen aufgefundener Hamilton-Kreis H einer von drei 3H-Kreisen ist, kann man folgendermaßen prüfen:

- (F 4) **Feststellung 4:** – man färbt die Kanten von H (bei einer Durchlaufung) abwechselnd rot und blau, und die übrigen Kanten grün; H ist genau dann einer von drei 3H-Kreisen, wenn nun die grünen Kanten mit den roten einerseits und mit den blauen andererseits je einen Hamilton-Kreis bilden; –

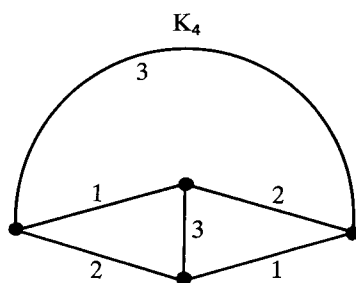
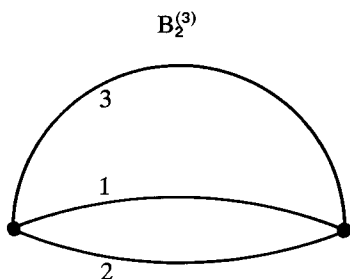
das „dann“ ist aus der Definition der 3H-Färbung, das „nur dann“ aus dieser Definition und (F 2) (c) abzulesen. \square

Satz 2: Zu jeder (positiven) geraden Zahl $e = 2n$ gibt es 3H-Graphen mit e Ecken, – darunter auch planare.

Beweis durch Angabe von planaren Beispielen; die Ziffern bei den Kanten geben eine 3H-Färbung an, – dabei gelten für ungerades n in der Nähe der Ecke v_{n+1} die eingeklammerten Ziffern:



Unter diesen Beispielen findet sich für $e = 2$ der 3H-gefärbte $B_2^{(3)}$, der (einzige) 3-reguläre Graph mit 2 Ecken, – er ist planar und bipartit; ferner findet sich für $e = 4$ der 3H-gefärbte K_4 :



(F 5) Feststellung 5: (a) 3H-Graphen mit mehr als 2 Ecken haben keine Mehrfach-Kanten;

(b) es gibt keinen bipartiten 3H-Graphen mit 4 Ecken; –

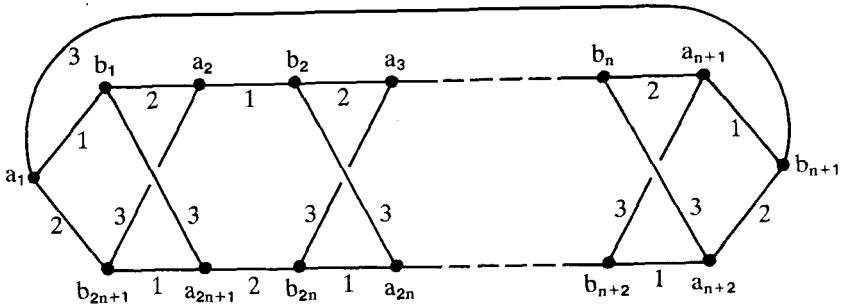
(a): bei einer 3H-Färbung wären zwei Kanten mit denselben Endpunkten ein 2-farbiger Kreis, also ein Hamilton-Kreis, – es könnte daher keine weiteren Ecken geben; (b): ein 3-regulärer bipartiter Graph mit 4 Ecken hat Mehrfach-Kanten, ist also wegen (a) kein 3H-Graph. \square

Satz 3: (a) Zu jeder der Zahlen $e = 4n + 2$ ($n = 0, 1, \dots$) gibt es bipartite 3H-Graphen mit e Ecken;

(b) zu keiner der Zahlen $e = 4n$ gibt es bipartite 3H-Graphen mit e Ecken;

(c) mit Ausnahme des $B_2^{(3)}$ sind die bipartiten 3H-Graphen nicht planar.

Beweis: (a) zeigen wir durch Angabe von Beispielen; die Bezeichnung der Ecken entspricht dabei der Bipartitheits-Zerlegung $A = \{a_i\}$, $B = \{b_i\}$ der Eckenmenge:



für $e = 2$ ($n = 0$) ist das der 3H-gefärbte $B_2^{(3)}$ und
für $e = 6$ ($n = 1$) der 3H-gefärbte $K_{3,3}$;

(b) unten – s. (e-4) – wird gezeigt werden: Ist G ein bipartiter 3H-Graph mit $e \geq 6$ Ecken, so erzeugt der Prozeß (e-4) aus ihm einen bipartiten 3H-Graphen mit $e-4$ Ecken, – was zusammen mit (F 5) (b) die Behauptung ergibt;

(c) ein 3-regulärer planarer Graph mit einem Hamilton-Kreis – insbesondere also jeder planare 3H-Graph – ist brückenlos und definiert daher bei jeder Einbettung in eine Ebene eine 3-reguläre Landkarte L , bei der bekanntlich $\sum (6-i) f_i = 12$ ist, wenn f_i die Anzahl der Länder mit i Ecken, der i -Ecke bedeutet;

wir können nun indirekt schließen: wäre der bipartite 3H-Graph $G \neq B_2^{(3)}$ planar und L eine durch seine Einbettung in eine Ebene erzeugte Landkarte, so wäre in L wegen der Bipartitheit $f_3 = f_5 = 0$; wegen (F 5) wäre auch $f_2 = 0$, da $G (\neq B_2^{(3)})$ ja mehr als 2 Ecken hätte; es gäbe also 4-Ecke in L , und da G , wieder wegen (F 5), mindestens 6 Ecken hätte, wäre kein 4-Eck von einem Hamilton-Kreis begrenzt: bei jeder 3H-Färbung von G kämen bei den (Grenz-)Kanten jedes 4-Ecks alle 3 Farben vor;

sei dann $K = p - q - r - s - p$ der Grenz-Kreis eines 4-Ecks F , und sei (o.B.d.A.) $p - q$ rot, $r - s$ blau und die beiden anderen Kanten von K grün; sei ferner $H_1 = a_1 - b_1 - a_2 - b_2 - \dots$ der rot-blaue 3H-Kreis mit $a_i - b_i$ als roten und $b_i - a_{i+1}$, $b_{2n+1} - a_1$ als blauen Kanten; die Indizes schließlich dürfen wir uns so gewählt denken, daß $p - q \equiv a_1 - b_1$ ist; dann hat, da $r - s$ blau ist, K notwendig die Form $K = a_1 - b_1 - a_j - b_{j-1} - a_1$, so daß man die Endpunkte der beiden grünen Grenzkanten von F bei einer Durchlaufung von H_1 in der Reihenfolge b_1, b_{j-1}, a_j, a_1 antrifft, was (in der Ebene) nur möglich ist, wenn eine dieser beiden grünen Kanten innerhalb, und die andere außerhalb von H_1 verläuft; sie müßten aber als nicht zu H_1 gehörige Grenzkanten ein und desselben Landes F zusammen mit F beide innerhalb, oder beide außerhalb von H_1 liegen, womit ein Widerspruch nachgewiesen ist. \square

Eine Variante des Teils (c) dieses Beweises:

Anstatt den Jordan'schen Kurvensatz zu benutzen, kann man auch den Satz von Kuratowski heranziehen: – bei einer Durchlaufung von H_1 im Sinne wachsender Indizes läge zwischen b_1 und b_{j-1} eine Ecke mehr aus $\{a_i\}$ als aus $\{b_i\}$, und zwischen a_j und a_1 wäre es umgekehrt; es müßte daher eine grüne Kante $a_k \text{ --- } b_m$ geben, bei der $2 \leq k \leq j-1$ und $j+1 \leq m \leq 2n+1$ ist: diese Kante, die beiden grünen Grenzkanten von F und die 6 Wege, in die H_1 durch die Endpunkte dieser drei grünen Kanten zerlegt wird, bilden ersichtlich eine Unterteilung des $K_{3,3}$ im Widerspruch zu der angenommenen Einbettung in eine Ebene. \square

Abbau und Aufbau von 3H-Graphen durch Streichen und Hinzufügen von Ecken und Kanten

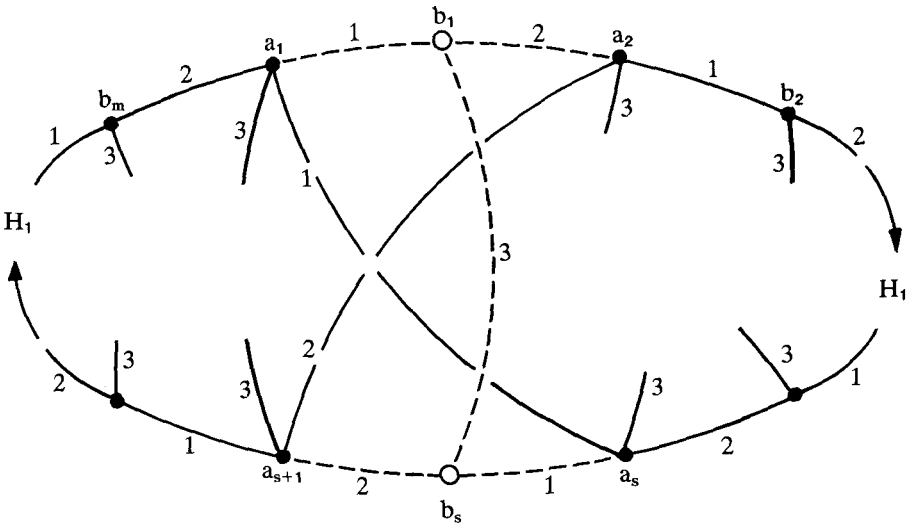
Wir beschreiben hier 4 Prozesse, durch die man jeden 3H-Graphen schrittweise in jeden anderen umwandeln kann, und benutzen dabei folgende Bezeichnungen: nach einer 3H-Färbung nennen wir den rot-blauen Hamilton-Kreis H_1 , den rot-grünen H_2 und den blau-grünen H_3 ; in Figuren entsprechen sich 1 und rot, 2 und blau, und 3 und grün; die Ecken von H_1 werden bei einer Durchlaufung so mit $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_m, b_m$ bezeichnet, daß die Kanten $a_i \text{ --- } b_i$ die roten, und die Kanten $b_1 \text{ --- } a_2, \dots, b_m \text{ --- } a_1$ die blauen Kanten von H_1 sind; – das geschieht auch bei nicht-bipartiten Graphen –, und für $i=m$ ist unter a_{i+1} natürlich a_1 zu verstehen; die grünen Kanten heißen Sehnen von H_1 ; die Endpunkte einer Sehne zerlegen H_1 in zwei Wege, und die Länge des kürzeren – bei Gleichheit die gemeinsame Länge – heißt die Spannweite dieser Sehne; zwei Sehnen heißen gekreuzt, (ohne daß dabei an Planarität gedacht werden müßte), wenn man beim Durchlaufen von H_1 abwechselnd einen Endpunkt der einen Sehne und dann einen der anderen antrifft (zwei Sehnen sind nach (F 3) endpunkt-fremd); einen Weg $p \text{ --- } q \text{ --- } r \text{ --- } s$, bei dem $p \text{ --- } q$ und $r \text{ --- } s$ gekreuzte Sehnen sind, – und $q \text{ --- } r$ folglich eine Kante von H_1 ist –, nennen wir eine Schere.

- (F 6) Feststellung 6: Ein 3H-Graph ist genau dann bipartit, wenn jede Sehne die Form $a_i \text{ --- } b_j$ hat; –

denn bei der gegebenen Indizierung der Ecken auf H_1 ist $A = \{a_i\}$, $B = \{b_i\}$ die einzige mögliche Bipartitheits-Einteilung der Eckenmenge, so daß Bipartitheit genau dann vorliegt, wenn keine der nicht zu H_1 gehörenden Kanten, – und das sind die Sehnen –, dieser Einteilung widerspricht. \square

Sei nun G ein nicht-bipartiter 3H-Graph; dann ist seine Eckenzahl $e \geq 4$ und er enthält eine Sehne der Form $a_i \text{ --- } a_j$ oder eine Sehne der Form $b_k \text{ --- } b_q$; in beiden Fällen können die Markierungen von H_1 so verschoben werden, daß G danach eine Sehne der Form $b_1 \text{ --- } b_s$ besitzt:

- (e-2) – streicht man dann in G die Ecken b_1 und b_s und die mit ihnen inzidenten Kanten, und verbindet man danach a_1 mit a_s durch eine rote, und a_2 mit a_{s+1} durch eine blaue Kante, so entsteht ein bereits 3H-gefärbter 3H-Graph G' mit $e-2$ Ecken, – auch dann, wenn $a_{s+1} = a_1$ oder/und $a_2 = a_s$ ist:

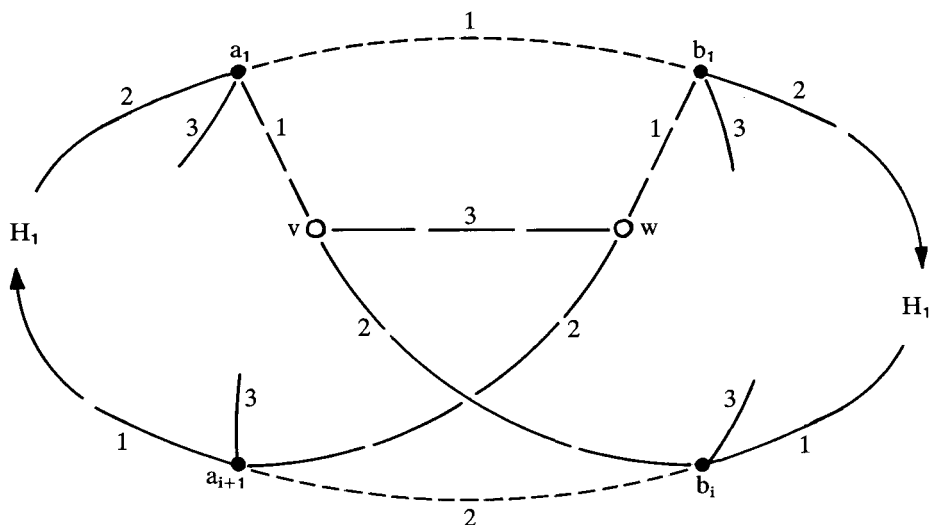


In der Figur sind die gestrichenen Kanten punktiert und die hinzugefügten unterbrochen gezeichnet; die Pfeile geben die zur Eckenbezeichnung passende Durchlaufungsrichtung von H_1 an;

Beweis, daß G' 3H-gefärbt ist: die neue rote Kante $a_1 - a_s$ und die neue blaue Kante $a_2 - a_{s+1}$ verbinden die Wege $a_2 - b_2 - \dots - a_s$ und $a_{s+1} - b_{s+1} - \dots - b_m - a_1$, die als Reste von H_1 nach den Streichungen übrig bleiben, zu einem rot-blauen Hamilton-Kreis in G' ; bei H_2 wird der rot-grün-rote Teil $a_1 - b_1 - b_s - a_s$ gestrichen und durch die neue rote Kante $a_1 - a_s$ ersetzt, was den Rest von H_2 zu einem rot-grünen Hamilton-Kreis in G' ergänzt; H_3 wird analog H_2 umgewandelt. \square

Der Prozeß (e-2) läßt sich selbstverständlich umkehren: $c - d$ und $g - h$ seien zwei bei (mindestens) einer 3H-Färbung verschiedenfarbige Kanten eines 3H-Graphen G mit e Ecken; dann können wir o.B.d.A. die Farben und Eckenbezeichnungen so gewählt denken, daß $c - d \equiv a_1 - b_1$ und $g - h \equiv b_i - a_{i+1}$ ist, – wobei auch $i = 1$ oder/und $i = m$ sein darf:

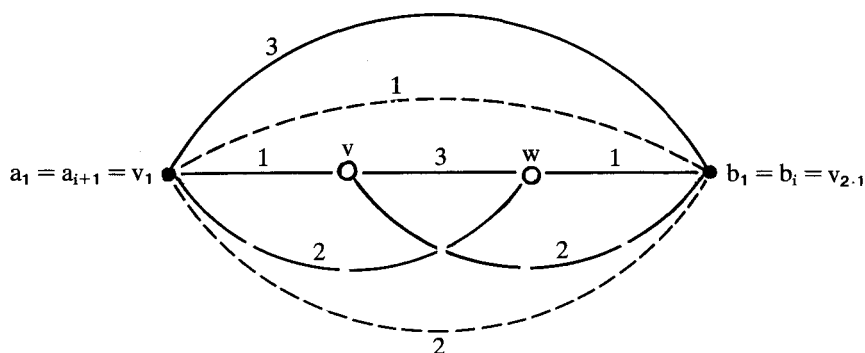
- (e+2) – streiche dann in G : die rote Kante $a_1 - b_1$ und die blaue Kante $b_i - a_{i+1}$, und füge hinzu: zwei Ecken v, w , eine grüne Kante $v - w$, zwei rote Kanten $a_1 - v$ und $b_1 - w$, und zwei blaue Kanten $b_1 - v$ und $a_{i+1} - w$; der so entstandene Graph G' ist dann ein bereits 3H-gefärbter 3H-Graph mit $e+2$ Ecken:



Diese (e+2) erläuternde Figur ist ebenso zu lesen wie die Figur bei (e-2);

– auch der Beweis, daß G' 3H-gefärbt ist, entspricht ganz dem Beweis bei (e-2): man verifiziert, daß die Hinzufügungen die durch die Streichungen unterbrochenen 3H-Kreise von G zu 3H-Kreisen in G' ergänzen. \square

Z.B. erhält man aus dem $B_2^{(3)}$ die übrigen im Beweis von Satz 2 benutzten 3H-Graphen, indem man immer wieder (e+2) auf die dort rote Kante $v_1 — v_2$ und die dort blaue Kante $v_{2n} — v_1$ anwendet; den ersten Schritt, die Gewinnung des K_4 aus dem $B_2^{(3)}$ durch (e+2) zeigt die folgende, ebenso wie die beiden vorangehenden zu lesende Figur:



Nach (F 6) läßt sich (e-2) wegen der Sehnen-Form $b_1 — b_s$ nur bei nicht-bipartiten Ausgangs-Graphen G anwenden; dem entspricht, daß (e+2) stets nicht-bipartite 3H-Graphen G' erzeugt, – die neue Kante $v — w$ ist an min-

destens 2 Kreisen ungerader Länge beteiligt –, auch wenn der Ausgangsgraph G bipartit war;

die beiden folgenden Prozesse $(e-4)$ und $(e+4)$ setzen Bipartitheit des Ausgangsgraphen G auch nicht voraus, übertragen sie aber auf den neuen Graphen G' , wenn sie bei G vorliegt:

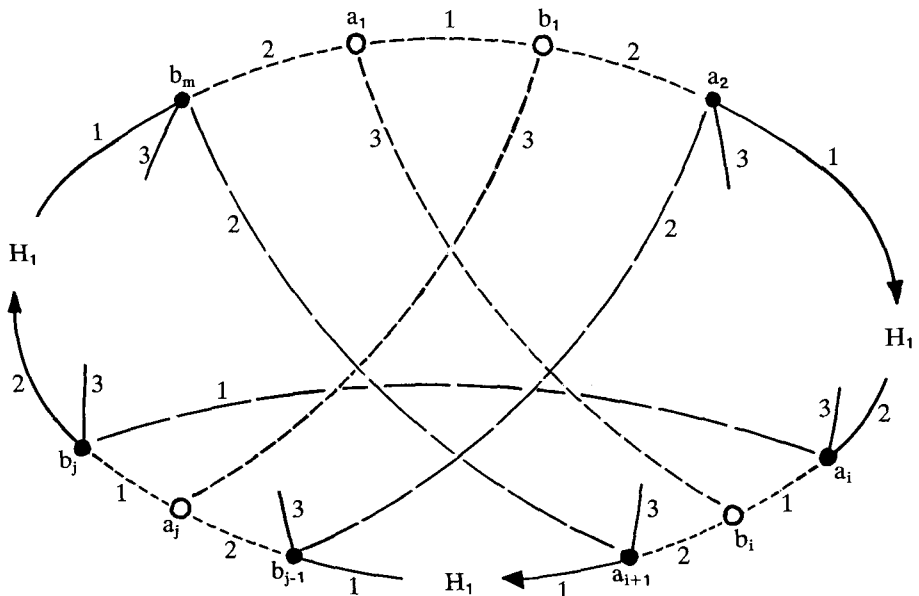
– in einem 3H-gefärbten Graphen G mit e Ecken sei eine Schere der speziellen Form $b_i - a_i - b_1 - a_j$ mit $2 \leq i < j \leq m$ aufgefunden:

- $(e-4)$ – streiche dann in G die 4 Ecken dieser Schere (und die mit ihnen inzidenten Kanten),
und füge hinzu:

falls $j = i+1$ ist, eine blaue Kante $b_m - a_2$ und eine rote Kante $a_i - b_j$, –
und falls $j > i+1$ ist, 2 blaue Kanten $b_m - a_{i+1}$ und $a_2 - b_{j-1}$, sowie eine rote Kante $a_i - b_j$;

der so entstandene Graph G' ist ein bereits 3H-gefärbter 3H-Graph mit $e-4$ Ecken, der überdies bipartit ist, wenn G bipartit war:

die folgende Figur erläutert den Fall $j > i+1$ und ist wie die drei vorangehenden Figuren zu lesen:



– der Beweis, daß $(e-4)$ einen 3H-gefärbten Graphen G' erzeugt, erfolgt ebenso wie bei $(e-2)$ und $(e+2)$; daß G' auch bipartit ist, wenn G es war, sieht man daran, daß alle hinzugefügten Kanten die Form $a_x - b_y$ haben und

also mit der Bipartitheits-Einteilung der Eckenmenge von G in Einklang stehen. \square

(e-4') Wenn Bipartitheit nicht interessiert, kann man auch mit Scheren der Form $a_i \text{---} a_1 \text{---} b_1 \text{---} a_j$ oder $b_i \text{---} a_1 \text{---} b_1 \text{---} b_j$ ($2 \leq i < j \leq m$) ähnlich wie bei (e-4) verfahren und aus 3H-gefärbten Graphen mit e Ecken solche mit $e-4$ Ecken gewinnen,

(e+4) – und natürlich kann man den Prozeß (e-4), – ebenso die Prozesse (e-4') –, umkehren;

– wir formulieren die Umkehrung nicht, da es sich, vor allem nach dem Beispiel (e-2), (e+2), um eine reine „Fließaufgabe“ handelt, und der Prozeß (e+4) hier auch nicht explizit benutzt werden wird.

(F 7) Feststellung 7: Mit Ausnahme des $B_2^{(3)}$ enthält jeder 3H-Graph bei jeder 3H-Färbung (mindestens) eine Schere; – bei bipartiten 3H-Graphen gibt es zu jeder Schere eine 3H-Färbung, bei der die Schere die bei (e-4) angenommene Form $b_i \text{---} a_1 \text{---} b_1 \text{---} a_j$ ($2 \leq i < j \leq m$) hat;

denn ist $p \text{---} y$ eine Sehne minimaler Spannweite und $W = p \text{---} q \text{---} \dots \text{---} x \text{---} y \subset H_1$ der (ein) Weg, der diese Spannweite bestimmt, so hat W mindestens die Länge 2, weil sonst $W = p \text{---} y \in H_1$ und die Sehne $p \text{---} y \notin H_1$ eine 2-fach-Kante wären; die auf W zu p benachbarte Ecke q ist also eine innere Ecke von W , und der Endpunkt c der Sehne $q \text{---} c$ kann daher nicht auch auf W liegen, weil $q \text{---} c$ sonst eine kleinere Spannweite als $p \text{---} y$ hätte: die Sehnen $p \text{---} y$ und $q \text{---} c$ kreuzen sich also und $y \text{---} p \text{---} q \text{---} c$ ist eine Schere; – der Rest ist selbstverständlich. \square

Satz 4: Sind G_1 und G_2 verschiedene 3H-Graphen, so kann man G_1 durch (endlich viele) Schritte der Form (e-2), (e+2), (e-4), (e+4) in G_2 überführen.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß man jeden 3H-Graphen $G \neq B_2^{(3)}$ durch Schritte der Form (e-2), (e-4) in den $B_2^{(3)}$ umwandeln kann, und das ist sicher der Fall, wenn man bei jedem solchen Graphen (e-2) oder (e-4) ausführen, und damit seine Eckenzahl verkleinern kann: ist nun G bipartit, so kann man nach (F7) (e-4) anwenden, und ist G nicht bipartit, so liegen nach (F 6) die Voraussetzungen für (e-2) vor. \square

Reine 3H-Graphen

Bezeichnung: Wenn bei einem 3H-Graphen jede 3-Färbung (der Kanten) eine 3H-Färbung ist, nennen wir ihn einen reinen 3H-Graphen.

(F 8) Feststellung 8: Ein 3H-Graph G ist genau dann nicht-rein, wenn es ein System aus mindestens 2 paarweise eckenfremden Kreisen gerader Länge gibt, die alle Ecken von G enthalten;

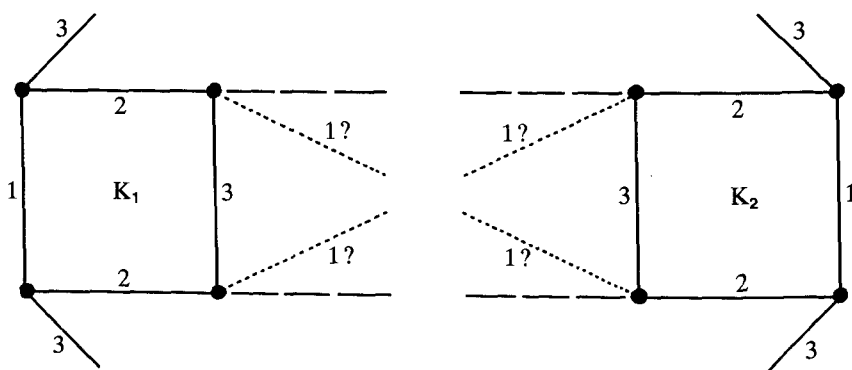
– denn färbt man die Kanten der Kreise eines solchen Systems mit 2 Farben und die übrigen Kanten von G mit einer dritten Farbe, so hat man eine 3-Färbung, die keine 3H-Färbung ist; umgekehrt bilden bei einer 3-Färbung, die keine 3H-Färbung ist, für mindestens ein Farb-Paar die Kanten mit diesen beiden Farben ein solches Kreis-System. \square

Satz 5: (a) 3H-Graphen mit ≤ 8 Ecken sind reine 3H-Graphen;

(b) für jede (gerade) Eckenzahl $e \geq 10$ gibt es sowohl reine als auch nicht-reine 3H-Graphen mit e Ecken, – unter den reinen auch planare.

Beweis: (a) Wegen der evidenten Reinheit des $B_2^{(3)}$ brauchen wir nur $e \geq 4$ zu untersuchen; da es dann nach (F 5) keine Mehrfachkanten geben kann, kommen Kreise der Länge 2 nicht infrage: es bleibt daher nur die Frage, ob es einen 3H-Graphen mit 8 Ecken gibt, in dem 2 eckenfremde Kreise K_1, K_2 der Länge 4 existieren:

G sei so ein Graph, und er sei 3H-gefärbt; dann weisen die 4 Kanten von K_1 , ebenso die von K_2 , alle drei Farben auf, da K_1 und K_2 ja keine Hamilton-Kreise sind; wir können daher o.B.d.A. für K_1 die durch die links stehende der beiden folgenden Figuren beschriebene Situation annehmen: blau (= 2) ist bei K_1 doppelt vertreten:

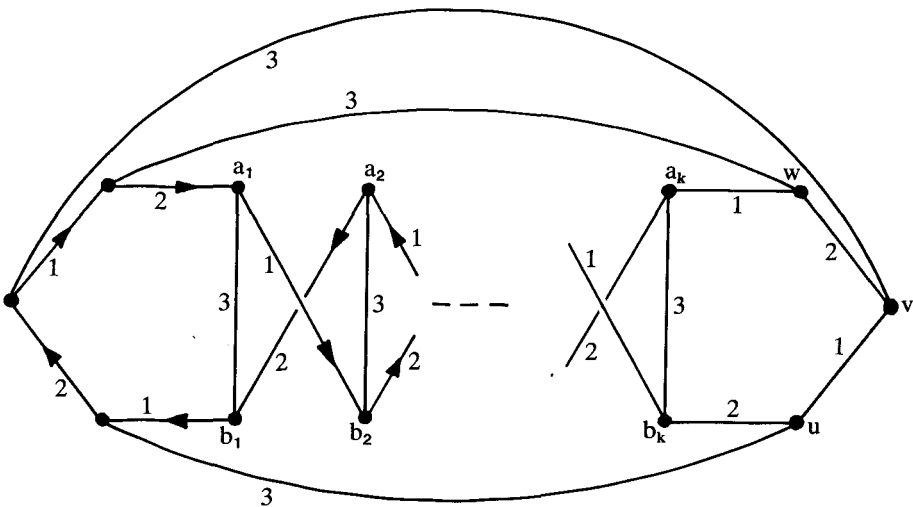


Die 1-Faktor-Eigenschaft der Kanten gleicher Farbe erzwingt dann für K_2 die durch die rechts stehende Figur angegebene gleichartige Färbung, denn neben den beiden blauen Kanten von K_1 gibt es nur noch 2 weitere blaue Kanten, die mit den 4 Ecken von K_2 inzident sein müssen; wie nun auch die beiden von K_1 nach K_2 führenden roten (= 1) Kanten verlaufen, – sie bilden mit der grünen (= 3) Kante von K_1 und der grünen Kante von K_2 einen 2-farbigem Kreis der Länge 4, – das widerspricht aber der Annahme einer 3H-Färbung von G ;

(b) die zum Beweis von Satz 2 angegebenen planaren 3H-Graphen mit beliebiger gerader Eckenzahl sind reine 3H-Graphen: beginnt man nämlich eine 3-Färbung mit den Kanten des Dreiecks $v_1 - v_2 - v_{2n} - v_1$, so sieht man ohne weiteres, daß die Farben der übrigen Kanten damit bereits eindeutig bestimmt sind, daß also jede 3-Färbung dieselbe, schon als 3H-Färbung erkannte Klassen-Zerlegung der Kantenmenge ergibt;

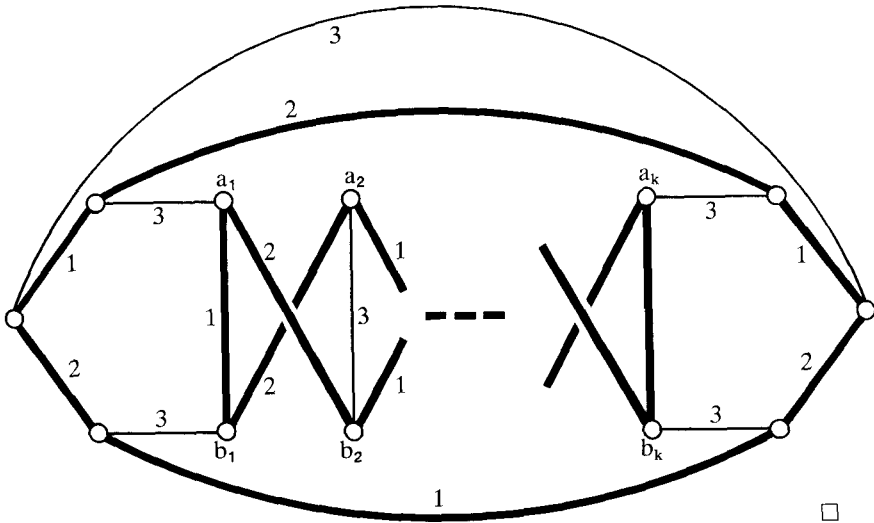
die Existenz nicht-reiner 3H-Graphen mit 10, 12, ... Ecken belegen wir auch durch Beispiele; dazu zeichnen wir zwei Exemplare desselben Graphen und geben im ersten eine 3H-Färbung an, die erläutert wird, während wir bei dem zweiten durch Hervorheben gewisser Kanten 2 eckenfremde Kreise der Längen 6 und $e-6$ aufweisen, was nach (F 8) die nicht-Reinheit bestätigt:

3H-Färbung für $k = 1, 2, \dots$



um H_1 besser verfolgen zu können, geben im linken Teil der Figur Pfeile eine Durchlaufungsrichtung für diesen 3H-Kreis an; sie sind rechts, in der Umgebung von v fortgelassen, weil dort die Durchlaufungsrichtung davon abhängt, ob k gerade oder ungerade ist;

die folgende Figur zeigt für $k = 2, 3, \dots$ denselben 3H-Graphen mit einer 3-Färbung, die keine 3H-Färbung ist: die stärker gezeichneten Kanten bilden 2 eckenfremde und eckendeckende Kreise gerade Länge:



(F 9) Feststellung 9: Das Dodekaeder D (genauer: der von seinen Ecken und Kanten gebildete Graph D) ist ein reiner 3H-Graph;

– wäre es anders, so gäbe es nach (F 8) in D ein System S aus mindestens 2 eckenfremden und eckendeckenden Kreisen gerader Länge; nach einer ausschließlich 5-Ecke bildenden Einbettung von D in eine Ebene gäbe es dann in S einen Kreis K , in dessen Innerem kein weiterer Kreis aus S , und also auch keine Ecke von D liegt, und einen anderen Kreis K' , bei dem entweder für sein Inneres oder für sein Äußeres dasselbe gilt; es müßten aber Kanten durch das Innere von K und durch das Innere bzw. das Äußere von K' laufen, weil diese Kreise sonst die ungerade Länge 5 hätten; bei x durch Kanten voneinander getrennten 5-Ecken im Innern (bzw. im Äußeren) hätte so ein Kreis die Länge $5x - 2(x - 1) = 3x + 2$, was nur für $x = 2$ und für $x = 4$ gerade Längen < 20 ergibt: 8 und 14; wegen $e = 20$ käme damit für S nur ein System aus 3 Kreisen der Längen 8, 8, 4 infrage; – Kreise der Länge 4 gibt es aber in D gar nicht. \square

(F 4) und (F 9) besagen zusammen:

(F 9') Feststellung 9': Man erhält stets eine 3H-Färbung des Dodekaeders, wenn man in ihm die Kanten irgendeines Hamilton-Kreises – ihn durchlaufend – abwechselnd rot und blau, und die übrigen Kanten grün färbt. *)

*) Den Mut zu dem Versuch, (F 9) zu begründen, gab mir Frau Ruth PROKSCH, Hannover, indem sie zunächst (F 9') bestätigte.

Aus (F2) (c) folgt

(F 10) Feststellung 10: In 3H-Graphen ist die Anzahl der 3H-Kreise durch 3 teilbar, – in reinen 3H-Graphen ist die Anzahl der Hamilton-Kreise durch 3 teilbar;

– letzteres, weil jeder Hamilton-Kreis 2-färbbar ist und damit eine 3-Färbung liefert, die dann eben eine 3H-Färbung ist. \square

(F 11) Feststellung 11: Für $e \geq 16$ gibt es 3H-Graphen mit 3-Färbungen, bei denen kein Hamilton-Kreis 2-farbig ist; –

Beispiele dafür sind die nicht-3H-Färbungen der nicht-reinen 3H-Graphen am Schluß des Beweises von Satz 5 (b): bei $e \geq 16$ ist dort $k \geq 5$, und dann sind $a_2 \text{ --- } b_3 \text{ --- } a_3 \text{ --- } b_2 \text{ --- } a_2$ und $a_3 \text{ --- } b_4 \text{ --- } a_4 \text{ --- } b_3 \text{ --- } a_3$ ein rot-grüner und ein blau-grüner nicht-Hamilton-Kreis; zusammen mit dem im Beweis benutzten rot-blauen Kreis der Länge 6 bestätigen sie die Behauptung. \square